Université Abou Bekr Belkaid, Tlemcen,
Faculté des Sciences,
Département de Mathématiques.

Année universitaire 2015/2016.
Janvier 2016.
Optimisation sans contraintes (L3-S5)

Epreuve finale

(durée : 01h 40mn)

<u>Questions de cours et exemples d'application</u> [**06 pts**]

1) A et B étant deux parties fermées d'un **R**_espace vectoriel normé E t.q. $A \subset B$ et $f : E \to \mathbf{R}$ étant une fonction continue sur E, on suppose aussi que f atteint son min dans A au pt x_A et dans B en x_B, montrer alors que $f(x_B) \leq f(x_A)$. (**1pt**)
2) f étant une fonction strictement convexe sur un esp. vect. E, montrer que si f admet, au moins, un minimum dans E alors celui-ci est unique. (**1pt**)
3) Dans $\mathbf{R}^2$ montrer que $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ est strictement convexe. Trouver ensuite son min dans $\mathbf{R}^2$ (c.àd. résoudre $\min_{x \in R^2} f(x)$). Quelle est sa valeur optimale ? (**2pts**)
4) Montrer que la fonction convexe $f : (x_1, x_2) \in \mathbf{R}^2 \to f(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2)^2 + 1$ admet plusieurs minima dans $\mathbf{R}^2$. Trouver aussi sa valeur optimale. Déterminer ensuite <u>graphiquement</u> S.O. c.àd. l'ensemble des solutions optimales du problème de minimisation de f sur $\mathbf{R}^2$. (**2pts**)

<u>Problème</u> [**14 pts**]

Dans $\mathbf{R}^n$, on considère la fonction quadratique f t.q. : $f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle - \langle b, x\rangle + c$

où A est une matrice carrée nxn symétrique, b un vecteur de $\mathbf{R}^n$ et c un réel.

1) Calculer **grad**f(x) et montrer que **grad**f(x) = Ax – b. (**1pt**)
2) Calculer **Hess**f(x) et montrer que **Hess**f(x) = A. (**1pt**)
3) Quelle condition doit-on imposer à A pour que f soit convexe ? Justifier. (**1pt**)
4) Quelle condition doit-on imposer à A pour que f soit strictement convexe ? Justifier. (**1pt**)
5) f étant strictement convexe, montrer qu'il est équivalent de chercher le min unique de f sur $\mathbf{R}^n$ ou de résoudre un système linéaire qu'il faudra préciser et dont on montre qu'il admet une solution unique (c.àd. qu'il est inversible). (**2pts**)
6) $f(x) = f(x_1,\dots,x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ où a_i et b_i $(i = 1,\dots,n)$ sont des réels.
   a) Montrer que l'on peut écrire f sous la forme d'une fonctionnelle quadratique dont il faut préciser la matrice symétrique A, le vecteur b et la constante c. (**2pts**)
   b) Pour quelles valeurs de a_i et de b_i $(i = 1,\dots,n)$ la fonction f est-elle convexe ? Justifier. (**1.5pts**)
   c) Pour quelles valeurs de a_i et de b_i $(i = 1,\dots,n)$ la fonction f est-elle strictement convexe ? Justifier.(**1.5pts**)
   d) On pose $a_i = i^2$ et $b_i = 2$ pour $i = 1,\dots,n$.
      d1. Montrer que, dans ce cas, f est strictement convexe sur $\mathbf{R}^n$. (**1pt**)
      d2. Résoudre le problème d'optimisation sans contraintes (P) : $\min_{x \in R^n} f(x)$ et montrer qu'il admet une solution optimale unique. (**2pts**)

Université de Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Math.

Année univ. 2015/2016
Janvier 2016.
Optimisation sans contraintes (L3/S5)

Corrigé de l'épreuve finale

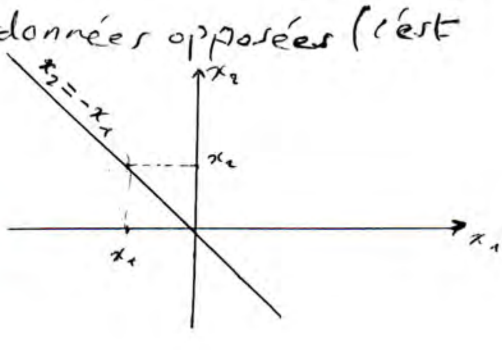
Questions de Cours

1) $A, B \underset{\text{fermés}}{\subset} E$ ($\mathbb{R}$-esp. vect.) t.q. $A \subset B$ $f: E \to \mathbb{R}$ cont. sur E t.q. $f(x_A) = \min\limits_{x \in A} f(x)$
et $f(x_B) = \min\limits_{x \in B} f(x) \Rightarrow f(x_B) \leq f(x)\ \forall x \in B \supset A \Rightarrow f(x_B) \leq f(x)\ \forall x \in A \ni x_A$
$\Rightarrow f(x_B) \leq f(x_A)$

2) f strict. convexe ds E ($\mathbb{R}$-esp. vect.). f admet, au moins, 1 min. ds E
Supposons alors que f admet deux min. x_1 et x_2 ds E c.à.d. $f(x_1) = f(x_2) = \min\limits_{x \in E} f(x) = \alpha$
Ds ce cas $f(x_1) = f(x_2) \leq f(\underbrace{\tfrac{1}{2}x_1 + \tfrac{1}{2}x_2}_{\in E}) \underset{f \text{ strict. convexe}}{<} \tfrac{1}{2} f(x_1) + \tfrac{1}{2} f(x_2) = \tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\alpha = \alpha = f(x_1) = f(x_2)$ Contradiction.
Donc nécessairement $x_1 = x_2$ et le min. de f sur E est unique

3) Ds $\mathbb{R}^2$ $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_2^2$ $\nabla f(x_1, x_2) = (2x_1, 4x_2)^T$ et $\text{Hess} f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$
les valeurs propres de $\text{Hess} f(x_1, x_2)$ st 2 et $4 > 0 \Rightarrow f$ strict. convexe (0.5pt)
l'équat. d'Euler s'écrit $\nabla f(x_1, x_2) = (0, 0)^T \Rightarrow 2x_1 = 0$ et $4x_2 = 0$ (1pt)
Donc $x^* = (0, 0)^T$ est min. de f sur $\mathbb{R}^2$ et sa val. opt. est $f(0, 0) = 0^2 + 2.0^2 = 0$ (0.5pt)

4) Ds $\mathbb{R}^2$, $f(x_1, x_2) = 2(x_1 + x_2)^2 + 1$
1ère version: On vérifie que f est convexe sur $\mathbb{R}^2$ et on résoud l'équat. d'Euler puisqu'on cherche les minima de f sur tt $\mathbb{R}^2$ (On considère 1 pb d'opt. sans contraintes)
$f(x_1, x_2) = 2x_1^2 + 2x_2^2 + 4x_1x_2 + 1 \Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = [4(x_1 + x_2), 4(x_2 + x_1)]^T$
$\text{Hess} f(x_1, x_2) = \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 4 & 4 \end{bmatrix}$ et $\det[\text{Hess} f(x_1, x_2) - \lambda I_2] = \begin{vmatrix} 4-\lambda & 4 \\ 4 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)^2 - 16 = 0$
$\Rightarrow (4 - \lambda - 4)(4 - \lambda + 4) = -\lambda(8 - \lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0$ et $\lambda_2 = 8$
Donc f est convexe puisque $\text{Hess} f(x_1, x_2)$ admet des valeurs propres ≥ 0
$\Rightarrow \nabla f(x_1, x_2) = 0_2 = (0, 0)^T \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -x_1$ Donc l'ens. des solutions optimales est: $SO = \{(x_1, -x_1),\ x_1 \in \mathbb{R}\}$ (1pt)
la valeur optimale (minimale ds ce cas) de f est $f(x_1, -x_1) = 2(x_1 - x_1)^2 + 1 = 1$ (0.5pt)
2ème version: On remarque la fction $(x_1, x_2) \mapsto 2(x_1 + x_2)^2 \geq 0\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
$\Rightarrow f(x_1, x_2) \geq 1\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \Rightarrow \min\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2) = 1 \leq f(x_1, x_2)\ \forall (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$
(1pt) le min. est alors atteint en tt pt de $\mathbb{R}^2$ de coordonnées opposées (c'est la 2nde bissectrice ds $\mathbb{R}^2$.
la valeur optimale est $1 = \min\limits_{\mathbb{R}^2} f(x_1, x_2)$ (0.5pt)



(0.5pt)

Problème

1) $\forall h \in \mathbb{R}^n$ $\langle \nabla f(x), h \rangle_n := \lim_{t \to 0^+} \frac{1}{t}\left[f(x+th) - f(x)\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\frac{1}{2}\langle A(x+th), x+th\rangle_n - \langle b, x+th\rangle_n + c - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle + \langle b, x\rangle - c\right]$

Dc $\langle \nabla f(x), h\rangle_n = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\cancel{\frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n} + \frac{1}{2}\langle Ax, th\rangle_n + \frac{1}{2}\langle A(th), x\rangle_n + \frac{1}{2}\langle A(th), A(th)\rangle_n - \langle b, x\rangle - \langle b, th\rangle - \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n + \langle b, x\rangle\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\frac{t}{2}\langle Ax, h\rangle_n + \frac{t}{2}\langle Ah, x\rangle_n + \frac{t^2}{2}\langle Ah, Ah\rangle_n - t\langle b, h\rangle_n\right]$

$= \frac{1}{2}\langle Ax, h\rangle_n + \frac{1}{2}\langle Ah, x\rangle_n - \langle b, h\rangle_n = \frac{1}{2} h^T Ax + \frac{1}{2} x^T Ah - b^T h$

Or $h^T Ax = (Ax)^T h = (x^T A^T) h = x^T A h$ car $A^T = A$ car A sym.

Dc $\langle \nabla f(x), h\rangle_n = h^T A x - b^T h = \langle Ax, h\rangle - \langle b, h\rangle$ $\forall h \in \mathbb{R}^n \Rightarrow \nabla f(x) = Ax - b$

2) Posant $g(x) = \langle \nabla f(x), h\rangle = \langle Ax, h\rangle - \langle b, h\rangle$ affine % à x

$f''(x)(h,k) := \langle H_{ess} f(x) h, k\rangle_n = \langle g'(x), k\rangle_n = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[g(x+tk) - g(x)\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left[\langle A(x+tk), h\rangle - \langle b, h\rangle - \langle Ax, h\rangle + \cancel{\langle b, h\rangle}\right]$

$= \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\left(\langle A\cancel{x}, h\rangle + t\langle Ak, h\rangle - \langle A\cancel{x}, h\rangle\right) = \langle Ak, h\rangle = h^T Ak$

$= (Ak)^T h = k^T A^T h = k^T A h = \langle Ah, k\rangle_n$ $\forall h, k \in \mathbb{R}^n$

Par identification avec $\langle H_{ess} f(x) h, k\rangle_n = \langle Ah, k\rangle$ $\forall h, k \in \mathbb{R}^n$

$\Rightarrow H_{ess} f(x) = A$

3) Pour que f soit convexe il faut et il suffit que A soit semi-définie positive puisque, ds ce cas, $f''(x)(y-x, y-x) = \langle H_{ess} f(x)(y-x), y-x\rangle_n = \langle A(y-x), y-x\rangle_n$

$= (y-x)^T A (y-x) \geq 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$

$\Leftrightarrow$ A est semi-déf. positive.

On rappelle que : $f : E \to \mathbb{R}$ $(f \in \mathcal{C}^2(E))$
f convexe $\Leftrightarrow \forall x, y \in E$ $f''(x)(y-x, y-x) \geq 0$

4) Pour que f soit strict. convexe il suffit que A soit définie positive puisque, ds ce cas, $f''(x)(y-x, y-x) = (y-x)^T A (y-x) > 0$ $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$ t.q. $x \neq y$

$\Leftrightarrow$ A est déf. positive

On rappelle que : $f : E \to \mathbb{R}$ $(f \in \mathcal{C}^2(E))$
$\forall x, y \in E$ $(x \neq y)$ $f''(x)(y-x, y-x) > 0 \Rightarrow f$ strict. convexe

Pour 3) et 4) 0.5 pt pour 1 réponse correcte sans justifier

5) f strict. convexe $\Rightarrow (P)$: $f(x^*) = \inf_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)$ admet 1 sol. opt. unique x^*

$\Leftrightarrow x^*$ vérifie l'équation d'Euler : $\nabla f(x)\big|_{x=x^*} = \nabla f(x^*) = O_n = \underbrace{(0,\dots,0)}_{n}^T$

(car il s'agit d'1 pb d'opt. sans contraintes). Or $\nabla f(x) = Ax - b$ ($\Rightarrow Ax^* - b = O_n$)

Donc x^* est sol. du système linéaire inversible $Ax = b$

x^* sol. unique de $Ax = b$ car A est inversible c.à.d. $x^* = A^{-1}b$

puisque f strict. convexe $\Rightarrow$ Hess $f(x) = A$ déf. positive $\Rightarrow$ ttes les valeurs propres de A st réelles et strict. positives $\Rightarrow$ dét $A = \prod_{i=1}^{n} \lambda_i(A) \neq 0$

6) $f(x) = f(x_1,\dots,x_n) \doteq \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^2 + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i$ où $a_i, b_i \in \mathbb{R}$ $\forall i = 1,\dots,n$

a) $f(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i x_i + \sum_{i=1}^{n} b_i x_i = (a_1x_1,\dots,a_nx_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix} + (b_1,\dots,b_n)\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}$

$= \left\langle \begin{pmatrix}a_1x_1\\ \vdots\\ a_nx_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\rangle_n - \left\langle \begin{pmatrix}-b_1\\ \vdots\\ -b_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\rangle_n = \left\langle \begin{pmatrix}a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & a_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x_1\\ \vdots\\ x_n\end{pmatrix}\right\rangle_n - \langle b, x\rangle_n$

$= \frac{1}{2}\langle Ax, x\rangle_n - \langle b, x\rangle_n + C$ où $A = \begin{bmatrix}2a_1 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 2a_n\end{bmatrix}$ 1pt $b = \begin{pmatrix}-b_1\\ \vdots\\ -b_n\end{pmatrix}$ 0.5pt et $C = 0$ 0.5pt

b) f est convexe $\Leftrightarrow$ A est semi-déf. positive c.à.d. lorsque ttes les valeurs propres de A sont réelles positives c.à.d. lorsque $a_i \geq 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ et $b_i \in \mathbb{R}$ $i = \overline{1,n}$

c) f est strict. convexe si A est déf. positive c.à.d. lorsque $a_i > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ et b_i qcq. ds $\mathbb{R}$ $i = \overline{1,n}$

d) $a_i = i^2$, $b_i = 2$ $\forall i = 1,\dots,n$.

d1- f strict. convexe puisque $a_i = i^2 > 0$ $\forall i = \overline{1,n}$ (Voir quest. c))

d2- Résoudre (P): $\min_{x\in\mathbb{R}^n} f(x) \Leftrightarrow$ Résoudre $\nabla f(x) = O_n \Leftrightarrow$ Résoudre $Ax = b$ où $A = \begin{bmatrix}2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 2n^2\end{bmatrix}$ et $b = \begin{bmatrix}-2\\ \vdots\\ -2\end{bmatrix}$

1,75 Si on note par x^* la sol. unique de $Ax = b \Leftrightarrow x^*$ sol. opt. unique de (P) alors $x^* = A^{-1}b = \begin{bmatrix}1/2 & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & 1/2n^2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-2\\ \vdots\\ -2\end{bmatrix} = \left(-1, -\frac{1}{4}, \dots, -\frac{1}{n^2}\right)^T$

0,25 x^* est unique car A est inversible (puisque f strict. convexe)