Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Licence de Mathématiques - Semestre 5.
Module : *Equations de la Physique Mathématique* - Examen Final
Lundi 18/01/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (10pts) On considère le problème

$$(P_1)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u = 0 \qquad \forall t > 0 \text{ et } 0 < x < 1 \\ \\ u(t,0) = 0 = u(t,1) \\ \\ u(0,x) = 0 \text{ et } \dfrac{\partial u}{\partial t}(0,x) = 1 \end{cases}$$

Résoudre le problème (P_1) en utilisant la méthode de séparation de variables.

Exercice 2: (10pts) On considère le problème

$$(P_2)\begin{cases} \dfrac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \gamma v = 0 \qquad \forall (x,y) \in \Omega =]0,1[\times]0,1[\\ \\ v|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases}$$

A l'aide de la méthode de séparation de variables (appliquée aux variables cartésiennes x et y), montrer qu'il existe des valeurs du paramètre γ pour lesquelles le problème (P_2) admet une solution non nulle.

Licence S5 – Module : Eq^s. de la physique mathématiques.

Épreuve finale – Corrigé –

EX1 : (10 pts) On cherche des solutions élémentaires $u_e(t,x) = T(t)X(x)$.

L'équation devient : $\dfrac{T''}{T} - \dfrac{X''}{X} + 1 = 0$.

$\Longleftrightarrow \dfrac{T''}{T} = \dfrac{X''}{X} - 1 = \lambda$ car ce sont deux fonctions de variables différentes qui sont égales partout, donc constantes.

On obtient ainsi le système $\begin{cases} T'' - \lambda T = 0 & (E_1) \quad 1 \\ X'' - (\lambda+1)X = 0. & (E_2) \quad 1 \end{cases}$

* L'équation (E_1) se résout de la façon suivante :

- Si $\lambda > 0$: $T(t) = C_1 \operatorname{ch} t\sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{sh} t\sqrt{\lambda}$
- Si $\lambda = 0$: $T(t) = C_1 t + C_2$ 1
- Si $\lambda < 0$: $T(t) = C_1 \cos t\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin t\sqrt{-\lambda}$.

* L'équation (E_2) se résout par :

- Si $\lambda > -1$: $X(x) = C_3 \operatorname{ch} x\sqrt{\lambda+1} + C_4 \operatorname{sh} x\sqrt{\lambda+1}$
- Si $\lambda = -1$: $X(x) = C_3 x + C_4$ 1
- Si $\lambda < -1$: $X(x) = C_3 \cos x\sqrt{-\lambda-1} + C_4 \sin x\sqrt{-\lambda-1}$.

Ainsi cinq cas se présentent :

Cas 1 : $\boxed{\lambda < -1}$: $u_e(t,x) = \left(C_1 \cos t\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin t\sqrt{-\lambda}\right)\left(C_3 \cos x\sqrt{-\lambda-1} + C_4 \sin x\sqrt{-\lambda-1}\right)$

Cas 2 : $\boxed{\lambda = -1}$: $u_e(t,x) = \left(C_1 \cos t + C_2 \sin t\right)\left(C_3 x + C_4\right)$

Cas 3 : $\boxed{-1 < \lambda < 0}$: $u_e(t,x) = \left(C_1 \cos t\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin t\sqrt{-\lambda}\right)\left(C_3 \operatorname{ch} x\sqrt{\lambda+1} + C_4 \operatorname{sh} x\sqrt{\lambda+1}\right)$ 1

Cas 4 : $\boxed{\lambda = 0}$: $u_e(t,x) = \left(C_1 t + C_2\right)\left(C_3 \operatorname{ch} x + C_4 \operatorname{sh} x\right)$

Cas 5 : $\boxed{\lambda > 0}$: $u_e(t,x) = \left(C_1 \operatorname{ch} t\sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{sh} t\sqrt{\lambda}\right)\left(C_3 \operatorname{ch} x\sqrt{\lambda+1} + C_4 \operatorname{sh} x\sqrt{\lambda+1}\right)$.

On applique les conditions aux limites $u(t,0)=0=u(t,1)$. On remarque que les cas 2, 3, 4 et 5 donnent $u_e \equiv 0$. Donc seul le cas 1 demeure avec l'équation : $\boxed{\sin\sqrt{-\lambda-1}=0}$ (2pts)

càd $\sqrt{-\lambda-1}=k\pi$, $k\geq 1$ et donc $\boxed{\lambda_k=-1-k^2\pi^2,\ k\geq 1}$

$$\text{d'où } \quad u_k(t,x)=\left(\tilde{C}_1\cos t\sqrt{1+k^2\pi^2}+\tilde{C}_2\sin t\sqrt{1+k^2\pi^2}\right)(\sin k\pi x).$$

Maintenant la condition $u(0,x)=0$, implique que : $\tilde{C}_1=0$.

$$\text{d'où } \quad u_k(t,x)=a_k\sin\left(t\sqrt{1+k^2\pi^2}\right)\sin(k\pi x). \quad (1)$$

Par superposition on obtient $u(t,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}a_k\sin\left(t\sqrt{1+k^2\pi^2}\right)\sin(k\pi x)$.

Reste à déterminer les a_k.

$$\frac{\partial u}{\partial t}(0,x)=\sum_{k=1}^{+\infty}\left(a_k\sqrt{1+k^2\pi^2}\right)\sin(k\pi x)=1$$

Sachant que les fonctions $(\sin(k\pi x))_{k\geq 1}$ sont orthogonales dans $L^2([0,1])$

On aura : $a_k\sqrt{1+k^2\pi^2}\int_0^1\sin^2(k\pi x)\,dx=\int_0^1\sin(k\pi x)\,dx$. (1)

$$\Longleftrightarrow a_k\sqrt{1+k^2\pi^2}\int_0^1\left(\frac{1-\cos 2k\pi x}{2}\right)dx=\left[\frac{-\cos k\pi x}{k\pi}\right]_0^1$$

$$\Longleftrightarrow \frac{1}{2}a_k\sqrt{1+k^2\pi^2}=\frac{1-\cos k\pi}{k\pi}=\frac{1-(-1)^k}{k\pi}$$

$$\text{d'où } \begin{cases} a_{2j}=0 \\ a_{2j+1}=\dfrac{4}{(2j+1)\pi\cdot\sqrt{1+\pi^2(2j+1)^2}}\end{cases}$$

En définitive :

$$\boxed{u(t,x)=\frac{4}{\pi}\sum_{j=0}^{+\infty}\frac{\sin((2j+1)\pi x)\sin\left(t\sqrt{1+\pi^2(2j+1)^2}\right)}{(2j+1)\sqrt{1+\pi^2(2j+1)^2}}} \quad (1)$$

<u>EX2</u> : (10pts) on cherche des solutions élémentaires $u_e(x,y) = X(x)Y(y)$.

L'équation donne : $\dfrac{X''}{X} + \dfrac{Y''}{Y} + \gamma^2 = 0$; et le système

$$\begin{cases} X'' - \lambda X = 0 & (1) \quad 1 \\ Y'' + (\lambda+\gamma^2)Y = 0 & (2) \quad 1 \end{cases}$$

<u>Solutions de (1)</u> :
$$\begin{cases} \cdot \text{ Si } \lambda > 0 : & X(x) = C_1 \operatorname{ch} x\sqrt{\lambda} + C_2 \operatorname{sh} x\sqrt{\lambda} \\ \cdot \text{ Si } \lambda = 0 : & X(x) = C_1 x + C_2 \\ \cdot \text{ Si } \lambda < 0 : & X(x) = C_1 \cos x\sqrt{-\lambda} + C_2 \sin x\sqrt{-\lambda}. \end{cases}$$ 1

<u>Solutions de (2)</u> :
$$\begin{cases} \cdot \text{ Si } \lambda+\gamma^2 < 0 : & Y(y) = C_3 \operatorname{ch} y\sqrt{-\lambda-\gamma} + C_4 \operatorname{th} y\sqrt{-\lambda-\gamma} \\ \cdot \text{ Si } \lambda+\gamma = 0 : & Y(y) = C_3 y + C_4 \\ \cdot \text{ Si } \lambda+\gamma > 0 : & Y(y) = C_3 \cos y\sqrt{\lambda+\gamma} + C_4 \sin y\sqrt{\lambda+\gamma}. \end{cases}$$ 1

Le bord de Ω est $\partial\Omega = \{(0,y) \,/\, y \in [0,1]\} \cup \{(1,y) \,/\, y \in [0,1]\} \cup$ 2pts
$\cup \{(x,0),\, x \in [0,1]\} \cup \{(x,1) \,/\, x \in [0,1]\}$.

Il faut regarder dans quels cas les fonctions X et Y ne sont pas identiquement nulles quand on prend $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$. On voit que seuls les cas $\lambda < 0$ et $\lambda+\gamma > 0$ restent. Avec

$$\sin\sqrt{-\lambda} = 0 \quad \text{et} \quad \sin\sqrt{\lambda+\gamma} = 0.$$ 2pts

donc $\lambda = -n^2\pi^2$, $n \geq 1$ et $\lambda+\gamma = m^2\pi^2$, $m \geq 1$.

d'où $\boxed{\gamma^2 = (n^2+m^2)\pi^2, \quad n, m \geq 1.}$ 1

Pour ces valeurs de γ, on a une solution u non identiquement nulle donnée par

$$\boxed{u(x,y) = C \cdot \sin(n\pi x)\sin(m\pi y)}, \quad (C \text{ constante qcq}).$$ 1

(Pour $\gamma \neq (n^2+m^2)\pi^2, \forall n,m$; la seule solution $u \equiv 0$).