Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Licence de Mathématiques - Semestre 5.
Module : *Introduction à l'Analyse Hilbertienne* - Examen Final
Jeudi 21/01/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (10pts) On se place dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne. On pose

$$F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \diagup x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$$

1. Déterminer l'expression de $P_F(x)$, la projection orthogonale de x sur le plan F.
2. Ecrire la matrice de P_F dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$.
3. Calculer ensuite la norme de P_F.
4. Le résultat précédent était-il prévisible ?

Exercice 2: (10pts) Soit $(H, < ., . >)$ un espace de Hilbert et $T : H \to H$ un opérateur linéaire continu vérifiant

$$\langle Tx, y \rangle = \langle x, Ty \rangle \qquad \forall x, y \in H$$

1. Dire pourquoi $KerT$ est fermé dans H.
2. Montrer que $(ImT)^{\perp} = KerT$.
3. En déduire que $H = KerT \oplus \overline{ImT}$.

Licence S5 — 2015/2016.

Module : "Introduction à l'Analyse Hilbertienne"

Épreuve finale - Corrigé.

Ex1 : (10pts) $F = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \,/\, x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}$

1°/ Expression de P_F : Pour $x \in F$ on a $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ -x_1 - x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Donc la famille $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$ est génératrice dans F, et comme ces deux vecteurs sont indépendants, alors cette famille est une base de F.

Posons $y = P_F(x)$ alors on a $\begin{cases} y \in F \\ x - y \perp \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \\ x - y \perp \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$ ce qui donne :

$$\begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ (x_1 - y_1) - (x_3 - y_3) = 0 \\ (x_2 - y_2) - (x_3 - y_3) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y_1 + y_2 + y_3 = 0 \\ y_1 - y_3 = x_1 - x_3 \\ y_2 - y_3 = x_2 - x_3 \end{cases}$$

d'où la solution $\begin{cases} y_1 = \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 \\ y_2 = -\frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 \\ y_3 = -\frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 \end{cases}$

d'où $\boxed{P_F(x) = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 \\ -\frac{1}{3} x_1 + \frac{2}{3} x_2 - \frac{1}{3} x_3 \\ -\frac{1}{3} x_1 - \frac{1}{3} x_2 + \frac{2}{3} x_3 \end{pmatrix}}$ 3pts

2°/ Matrice de P_F : $\boxed{M_{P_F} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} & 2/3 & -1/3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2/3 \end{pmatrix}}$ 2pts

3°/ Norme de P_F : Comme $\mathbb{R}^3$ est muni de la norme euclidienne, alors $\|P_F\| = \sqrt{\max_{i=1,2,3} \lambda_i}$ où λ_i sont les valeurs propres de la matrice $A = M_{P_F}^T M_{P_F}$.

$$A = M_{P_F}^T \cdot M_{P_F} = \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/3 \\ -1/3 & -\frac{1}{3} & 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/3 & -1/3 & -1/3 \\ -\frac{1}{3} & 2/3 & -1/3 \\ -\frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & 2/3 \end{pmatrix}.$$

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2/3 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & \lambda - 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & \lambda - 2/3 \end{vmatrix} = \lambda(\lambda-1)^2$$

Les valeurs propres sont $\lambda = 0$ et $\lambda = 1$ (de multiplicité 2)

donc $\max_{1 \leq i \leq 3} \lambda_i = 1$ et donc $\boxed{\|P_F\| = 1}$ 8pts

4°/ Résultat prévisible : On est dans $\mathbb{R}^3$ muni de la norme euclidienne, qui est liée au produit scalaire naturel de $\mathbb{R}^3$.

On a montré dans le cours que $\forall x \in \mathbb{R}^3$ $\|P_F x\| \leq \|x\|$.

donc $\|P_F\| \leq 1$. Mais pour $x_0 \in F \setminus \{0\}$ on a $P_F x_0 = x_0$

d'où $\frac{\|P_F x_0\|}{\|x_0\|} = 1$ donc $\|P_F\| = 1$. Ainsi ce résultat était prévisible ! 2pts

EX2 : (10 pts)

1°/ Ker T est fermé :

$$\mathrm{Ker}\,T = \{x \in H \,/\, Tx = 0\} = T^{-1}(\{0_H\}).$$

Comme T est continu et que $\{0_H\}$ est fermé dans H, alors Ker T est fermé dans H. (2 pts)

2°/ $(\mathrm{Im}\,T)^{\perp} = \mathrm{Ker}\,T$:

* Soit $x \in \mathrm{Ker}\,T$: soit $y \in \mathrm{Im}\,T$ qcq càd $y = Tz$, $z \in H$ qcq.

(2,5) alors $\langle x, y\rangle = \langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle$ par la propriété donnée

$= \langle 0, z\rangle$ car $x \in \mathrm{Ker}\,T$

$= 0$

donc $x \perp \mathrm{Im}\,T \Longrightarrow \mathrm{Ker}\,T \subset (\mathrm{Im}\,T)^{\perp}$.

* Soit maintenant $x \in (\mathrm{Im}\,T)^{\perp}$; donc $\forall z \in H$ on a : $\langle x, Tz\rangle = 0$

(2,5) or $\langle x, Tz\rangle = \langle Tx, z\rangle$ donc $\langle Tx, z\rangle = 0$, $\forall z \in H$

càd $Tx \perp H \Longrightarrow Tx = 0 \Longrightarrow x \in \mathrm{Ker}\,T \Longrightarrow (\mathrm{Im}\,T)^{\perp} \subset \mathrm{Ker}\,T$

cqfd.

3°/ $H = \mathrm{Ker}\,T \oplus \overline{(\mathrm{Im}\,T)}$:

Comme Ker T est un sous-espace fermé alors on a :

$$H = (\mathrm{Ker}\,T) \oplus (\mathrm{Ker}\,T)^{\perp}$$

or $\mathrm{Ker}\,T = (\mathrm{Im}\,T)^{\perp}$ donc $(\mathrm{Ker}\,T)^{\perp} = \left((\mathrm{Im}\,T)^{\perp}\right)^{\perp} = \overline{(\mathrm{Im}\,T)}$

(3 pts) D'où $H = (\mathrm{Ker}\,T) \oplus \overline{(\mathrm{Im}\,T)}$