Université Aboubekr BELKAID - Tlemcen
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015/2016.

Licence de Mathématiques - Semestre 6.
Module : *Transformations Intégrales* - Contrôle continu.
Dimanche 10/04/2016 - Durée : 02h.

Exercice 1: (07pts) Soit la fonction $f(x) = \left(1 - x^2\right) \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.

1. Représentez graphiquement la fonction f.
2. f appartient-elle à $L^1(\mathbb{R})$? à $L^2(\mathbb{R})$? à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$?
3. Calculez $\widehat{f}$.
4. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$I = \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin \xi - \xi \cos \xi}{\xi^3} \right)^2 d\xi$$

Exercice 2: (08pts) On donne les fonctions

$$f(x) = \mathbb{1}_{[-1,0]}(x) \text{ et } g(x) = \mathbb{1}_{[0,1]}(x).$$

1. Calculez $\widehat{f}$, $\widehat{g}$; puis montrez que $\widehat{f}(\xi).\widehat{g}(\xi) = \dfrac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}$.
2. Peut-on affirmer que

$$2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x) \,.\, g(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(\xi) \,.\, \widehat{g}(\xi)\, d\xi \;\; ?$$

   Expliquez.
3. Déduire de ce qui précède la valeur de

$$J = \int_{\mathbb{R}} \frac{(1 - \cos \xi) \cos \xi}{\xi^2} d\xi$$

Exercice 3: (05pts) Soient deux fonctions $u \in L^1(\mathbb{R})$ et $v \in L^2(\mathbb{R})$. Montrez, en utilisant la transformation de Fourier, que $u * v \in L^2(\mathbb{R})$ et que

$$\|u * v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^1} \, \|v\|_{L^2}.$$

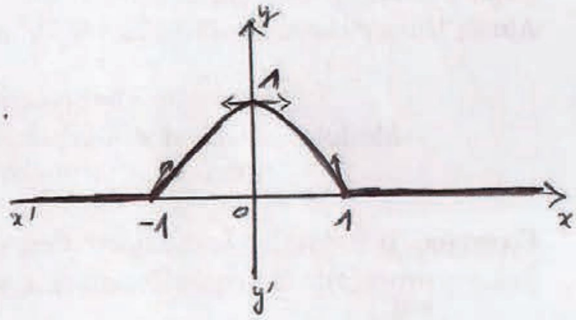
Licence de Mathématiques - Semestre 6 -

Module : Transformations Intégrales - Contrôle Continu -

- Corrigé -

Ex1 : (07pts)

1°/ $f(x) = (1-x^2)\,\mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$.



(1pt)

2°/ * $f \in L^1(\mathbb{R})$ car f est continue sur $[-1,1]$ et nulle ailleurs ; ou bien en calculant $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} |f(x)|\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)\,dx = \left[x - \frac{1}{3}x^3\right]_{-1}^{1} = \frac{4}{3}$ (finie)

(0,5pt)

* $f \in L^2(\mathbb{R})$, pour les mêmes raisons ; ou bien en calculant

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2\,dx = \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2\,dx = \left[x - \frac{2}{3}x^3 + \frac{1}{5}x^5\right]_{-1}^{1} = \frac{8}{15} \text{ (finie)}$$

(0,5pt)

(1pts) * $f \notin \mathcal{S}(\mathbb{R})$ car f n'est pas dérivable aux points 1 et -1.

3°/ Calcul de $\hat{f}$: Soit $g(x) = \mathbb{1}_{[-1,1]}(x)$; alors

$$\hat{f}(\xi) = \hat{g}(\xi) + \frac{d^2}{d\xi^2}\big(\hat{g}(\xi)\big). \text{ Or } \hat{g}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi}.$$

Donc $\displaystyle\big(\hat{g}(\xi)\big)' = \frac{2\cos\xi}{\xi} - \frac{2\sin\xi}{\xi^2}$ et $\displaystyle\big(\hat{g}(\xi)\big)'' = \frac{-2\sin\xi}{\xi} - \frac{4\cos\xi}{\xi^2} + \frac{4\sin\xi}{\xi^3}$.

d'où $\displaystyle\hat{f}(\xi) = \frac{2\sin\xi}{\xi} - \frac{2\sin\xi}{\xi} - \frac{4\cos\xi}{\xi^2} + \frac{4\sin\xi}{\xi^3}$

$$\boxed{\hat{f}(\xi) = 4\,\frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^3}}$$

(2pts)

4°/ Calcul de $\underline{I}$: Comme $f \in L^2(\mathbb{R})$, on peut donc appliquer la formule de Plancherel.

$$\|\hat{f}\|_{L^2}^2 = 2\pi \, \|f\|_{L^2}^2$$

$$\iff 16 \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\sin\xi - \xi\cos\xi}{\xi^3} \right)^2 d\xi = 2\pi \int_{-1}^{1} (1-x^2)^2 \, dx = \frac{16\pi}{15}$$

d'où $\boxed{I = \pi/15}$ (2pts)

Ex2 : (08pts) $\quad f(x) = 1\!\!1_{[-1,0]}(x)$ et $g(x) = 1\!\!1_{[0,1]}(x)$.

1°/ Calcul de $\hat{f}$ et $\hat{g}$:

$$\hat{f}(\xi) = \int_{-1}^{0} e^{ix\xi} \, dx = \left[\frac{e^{ix\xi}}{i\xi} \right]_{-1}^{0} = \frac{1 - e^{-i\xi}}{i\xi} \quad (0,5)$$

$$\hat{g}(\xi) = \int_{0}^{1} e^{ix\xi} \, dx = \left[\frac{e^{ix\xi}}{i\xi} \right]_{0}^{1} = \frac{e^{i\xi} - 1}{i\xi}. \quad (0,5)$$

$$\hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi) = \frac{(1-e^{-i\xi})(e^{i\xi}-1)}{-\xi^2} = \frac{e^{i\xi} - 1 - 1 + e^{-i\xi}}{-\xi^2}$$

$$= \frac{2\cos\xi - 2}{-\xi^2} = 2\,\frac{1-\cos\xi}{\xi^2} = 2\,\frac{2\sin^2(\xi/2)}{\xi^2}$$

d'où $\boxed{\hat{f}(\xi)\,\hat{g}(\xi) = \dfrac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}}$ (1pt)

2°/ Affirmation ? (3pts)

NON on ne peut pas l'affirmer, car ces deux intégrales ne représentent pas le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R})$ puisque

$$\langle f, g\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{g(x)}\,dx = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx \text{ car } f, g \text{ réelles}$$

mais $\langle \hat{f}, \hat{g}\rangle_{L^2(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi \neq \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,d\xi$.

On peut s'en convaincre en calculant ces deux intégrales.

D'abord $\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = 0$ car $[-1,0]\cap[0,1]=\{0\}$ et ceci est de même nulle.

ensuite $\int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\hat{g}(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}} \frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2}\,d\xi \neq 0$ sinon $\frac{\sin^2(\xi/2)}{(\xi/2)^2} \equiv 0$!

3°/ Calcul de J : La bonne identité (de Plancherel) est la suivante : $2\pi \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \hat{f}(\xi)\overline{\hat{g}(\xi)}\,d\xi$

d'où $\int_{\mathbb{R}} \left(\frac{1-e^{-i\xi}}{i\xi}\right)\left(\frac{e^{-i\xi}-1}{-i\xi}\right)d\xi = 0$

$\iff \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-i\xi}-1-e^{-2i\xi}+e^{-i\xi}}{\xi^2}\,d\xi = 0$ (3pts)

$\iff \int_{\mathbb{R}} \frac{2(1-\cos\xi)(\cos\xi - i\sin\xi)}{\xi^2}\,d\xi = 0$

d'où $\boxed{J = 0}$

(c'est la partie réelle de l'intégrale précédente).

Ex3 : (05 pts).

- Comme $u \in L^1(\mathbb{R})$, alors $\hat{u}$ est continue, bornée et tend vers 0 quand $|\xi| \to +\infty$. On a aussi

$$\|\hat{u}\|_\infty \leq \|u\|_{L^1(\mathbb{R})} \quad (*)$$

- Puisque $v \in L^2(\mathbb{R})$, alors $\hat{v} \in L^2(\mathbb{R})$ et on a l'identité de Plancherel

$$\|\hat{v}\|_{L^2}^2 = 2\pi \, \|v\|_{L^2}^2 \, . \quad (**)$$

Maintenant $|\hat{u}(\xi) \cdot \hat{v}(\xi)| \leq \left(\sup_{\mathbb{R}} |\hat{u}(\xi)|\right) \cdot |\hat{v}(\xi)|$

$$\Longrightarrow \quad |\hat{u}(\xi) \cdot \hat{v}(\xi)|^2 \leq \|\hat{u}\|_\infty^2 \cdot |\hat{v}(\xi)|^2$$

Ceci prouve que $\hat{u} \cdot \hat{v} \in L^2(\mathbb{R})$, et donc $u * v \in L^2(\mathbb{R})$.

Par l'inégalité précédente on a :

$$\|\hat{u} \cdot \hat{v}\|_{L^2}^2 \leq \|\hat{u}\|_\infty^2 \cdot \|\hat{v}\|_{L^2}^2 \, .$$

En utilisant l'identité de Plancherel de nouveau, on obtient

$$2\pi \, \|u * v\|_{L^2}^2 \leq \|\hat{u}\|_\infty^2 \cdot 2\pi \, \|v\|_{L^2}^2$$

$$\Longrightarrow \quad \|u * v\|_{L^2} \leq \|\hat{u}\|_\infty \cdot \|v\|_{L^2} \leq \|u\|_{L^1} \cdot \|v\|_{L^2}$$

(cqfd).