Université de Tlemcen

Le 12/04/2016

Faculté des Sciences

Département de Mathématiques

L 3 Math.

Contrôle Continu de : Introduction aux processus stochastiques

Durée 1h30mn.

Exercice 1 : On considère X et Y deux v.a.r. indépendantes telles que $X \hookrightarrow \mathcal{U}_{[0,1]}$ et $Y \hookrightarrow \mathcal{E}(\lambda)$, λ un réel positif.

1) Déterminer la fonction génératrice des moments du couple aléatoire $Z = (X, Y)$.

2) Déterminer la matrice de covariance du couple aléatoire (X, S) où $S = X + Y$.

Exercice 2 : Soit X et Y deux v.a.r. indépendantes de même loi $\mathcal{N}(0,1)$. 1) Déterminer la loi du couple (X, Z) où $Z = X^2 + Y^2$.

2) En déduire la loi de la v.a.r. Z puis la loi conditionnelle de X sachant $X^2 + Y^2$.

3) Calculer l'espérance conditionnelle $E(|X| / X^2 + Y^2)$

Exercice 3 : On considère deux v.a.r. indépendantes X et Y de lois respectives $\mathcal{B}(p)$ et $\mathcal{B}(n, p)$

1) Donner la loi de S.

2) Calculer la loi du couple aléatoire (X, S) où $S = X + Y$

3) Calculer la fonction de masse de la loi conditionnelle de X / S.

Bon courage !

Corrigé Contrôle Introd. aux pr.

EX1 1) Soit $t=(t_1,t_2)\in\mathbb{R}^2$ $M_Z(t) = E(e^{\langle t,Z\rangle}) = E(e^{t_1X+t_2Y}) = E(e^{t_1X}) \cdot E(e^{t_2Y}) =$

$= M_X(t_1)\cdot M_X(t_2)$ = (voir table)

2) $C_{(X,S)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\,X & \mathrm{Cov}(X,S) \\ \mathrm{Cov}(X,S) & \mathrm{Var}\,S \end{pmatrix}$

$\mathrm{Var}\,S = \mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}\,X + \mathrm{Var}\,Y$ (indép. de X et Y)

$\mathrm{Cov}(X,S) = E(X.S) - E(X)\cdot E(S)$

$= E(X.(X+Y)) - E(X)\cdot E(X+Y)$

$= E(X^2+XY) - E(X)(E(X)+E(Y))$

$= E(X^2) + E(XY) - (E(X))^2 - EX\cdot EY$

$= \mathrm{Var}(X)$

$C_{(X,S)} = \begin{pmatrix} \mathrm{Var}\,X & \mathrm{Var}\,X \\ \mathrm{Var}\,X & \mathrm{Var}\,X+\mathrm{Var}\,Y \end{pmatrix}$ = (voir table)

1

Ex3 : 1) $S \sim \mathcal{B}(n+1,p)$: $\begin{cases} P(S=s) = C_{n+1}^{s}\, p^s (1-p)^{n+1-s} \\ D_S = \{0,\dots,n+1\}. \end{cases}$

la somme de deux binomiales de m paramètre p et indép. est une binomiale.

2) $p_{(X,S)}$? Soit h une fonction bornée $\begin{cases} U = X \\ S = X+Y \end{cases}$

$$E(h(U,S)) = \sum_{u,s} h(u,s)\, p_{(U,S)}(u,s)$$

$$= \sum_{x,y} h(x,x+y)\, p_{(X,Y)}(x,y)$$

$$= \sum_{\substack{x\in\{0,1\}\\ y\in\{0,\dots,n\}}} h(x,x+y)\, p^x(1-p)^{1-x} C_n^y\, p^y (1-p)^{n-y}$$

$$= \sum_{\substack{u\in\{0,1\}\\ s\in\{0,\dots,n+1\}}} h(u,s)\, p^u (1-p)^{1-u} C_n^{s-u}\, p^{s-u} (1-p)^{n-s+u}$$

$$= \sum_{\substack{u\in\{0,1\}\\ s\in\{0,\dots,n+1\}}} h(u,s)\, p^s (1-p)^{n+1-s} C_n^{s-u}$$

Alors $p_{(U,S)}(u,s) = \begin{cases} p^s (1-p)^{n+1-s} C_n^{s-u} & \text{si } u\in\{0,1\},\ s\in\{0,\dots,n+1\} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$

3) $\mathcal{L}(X/S)$ Pour $s \in \{0,1,\dots,n+1\}$

$$f_X^{S=s}(x) = \frac{p_{\cancel{(X},S)}^{(x,s)}}{p_S(s)} = \begin{cases} \dfrac{p^s(1-p)^{n+1-s}\, C_n^{s-x}}{p^s(1-p)^{n+1-s}\, C_{n+1}^s} & \text{si } x\in\{0,1\} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

$$= \begin{cases} \dfrac{C_n^{s-x}}{C_{n+1}^s} & \text{si } x\in\{0,1\} \text{ et } s\in\{0,1,\dots,n+1\} \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$$

2

__Ex2__: 1°/ $\mathcal{L}(X,Z)$? $\begin{cases} U = X \\ Z = X^2+Y^2\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} X = U \\ Y = \pm\sqrt{Z-U^2}\end{cases}$

$\varphi(x,y) = (u,z) = (x, x^2+y^2)$ si $y>0 \Rightarrow \begin{cases} x = u \\ y = \sqrt{z-u^2}\end{cases} : \varphi^{-1}$

$E(h(U,Z)) = \iint h(u,z)\, f_{(U,Z)}(u,z)\,du\,dz = \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,x^2+y^2)\, f_{(X,Y)}(x,y)\,dx\,dy$

$= \iint_{\mathbb{R}^2} h(x,x^2+y^2)\,\frac{1}{2\pi}\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

$\underset{\text{paire en } y}{=} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2}{2\pi}\int_0^{+\infty} h(x,x^2+y^2)\, e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}\,dy\,dx$

$J_{\varphi^{-1}} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{-2u}{2\sqrt{z-u^2}} \\ 0 & \frac{1}{2\sqrt{z-u^2}}\end{pmatrix}$; $|\det J_{\varphi^{-1}}| = \frac{1}{2\sqrt{z-u^2}}$

Remarquons que ici $y\geq 0$ ($y\in[0,+\infty)$) alors $z\geq u^2$ et $-\infty < u < +\infty$.

Alors $E(h(U,Z)) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{u^2}^{+\infty} \frac{1}{\pi}\, h(u,z)\, e^{-\frac{1}{2}z}\,\frac{1}{2\sqrt{z-u^2}}\,dz\,du =$

$= \iint_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\pi}\, h(u,z)\, e^{-\frac{1}{2}z}\,\frac{1}{2\sqrt{z-u^2}}\,\mathbb{1}_{[u^2,+\infty[}(z)\,dz\,du.$ (or $u = x$)

ainsi $f_{(X,Z)}(x,z) = \mathbb{1}_{[x^2,+\infty[}(z)\,\dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2\pi\sqrt{z-x^2}}$

$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[x^2,+\infty[}(z)\,\dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2\pi\sqrt{z-x^2}}\,dx = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2\pi}\int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \dfrac{dx}{\sqrt{z}\left(1-\left(\frac{x}{\sqrt{z}}\right)^2\right)^{1/2}} =$

$= \dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{2\pi}\int_{-1}^{1}\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \underset{\text{fct paire}}{=} \dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{\pi}\int_0^1 \dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}}{\pi}\left[\operatorname{Arcsin} t\right]_0^1 = \dfrac{e^{-\frac{1}{2}z}\cdot\pi}{\pi\cdot 2}$

Alors $f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}z} & \text{si } z\geq 0. \\ 0 & \text{sinon.}\end{cases}$

$\mathcal{L}(X/Z=z)$: $f_X^{Z=z}(x) = \dfrac{f_{(X,Z)}(x,z)}{f_Z(z)} = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi\sqrt{z-x^2}} & \text{si } z\geq x^2 \\ 0 & \text{sinon}\end{cases}$

3) $E(|X| / X^2+Y^2=z) = E(|X| / Z=z) = \int_{-\infty}^{+\infty} |x| f_X^{Z=z}(x)\, dx =$

$= \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} |x| \frac{1}{\pi\sqrt{z-x^2}}\, dx \underset{f^{c}\text{ paire}}{=} \frac{2}{\pi}\int_0^{\sqrt{z}} \frac{x}{\sqrt{z-x^2}}\, dx =$ (3)

$= -\frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{z}} \frac{-2x\,dx}{(z-x^2)^{1/2}} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{\sqrt{z}} (z-x^2)^{-\frac{1}{2}}(-2x)\, dx = -\frac{1}{\pi}\left[\frac{(z-x^2)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}\right]_0^{\sqrt{z}} =$

$= -\frac{2}{\pi}\left(0 - z^{1/2}\right) = \frac{2\sqrt{z}}{\pi}$.

Barème : chaque question = 1 pt
puis une règle de 3 pour obtenir
la note sur 20.