Université Abou-Beker Belkaid
Faculté des Sciences
Département de Mathématiques
Année Universitaire 2015-2016.
3.ère année methématiques

Epreuve partielle: EDP (durée 2 heures).

Problème 1

Soit le problème suivant

$$(1) \qquad \begin{cases} -\Delta u &= f \text{ dans } B_1(0), \\ u &= 0 \text{ sur } \partial B_1(0), \end{cases}$$

ou $B_1(0)$, la boule unité de $I\!R^N$ et $f \in \mathcal{C}(\bar{B}_1(0))$.
1-Montrer que (1) est une équation elliptique.
2-Montrer que si $f \gneqq 0$, alors $u > 0$ dans Ω.
3-Montrer que le problème (1) admet au plus une solution.
4- On suppose que $f(x) = |x|^\alpha \equiv r^\alpha$ ou $\alpha > 0$. Chercher une solution de problème (1) sous la forme $u(x) = A - B|x|^\theta \equiv A - Br^\theta$.

Problème 2

A-Soit $u : I\!R^N \to I\!R$, $N \geq 3$, une fonction radiale de classe $C^2(I\!R^N)$ ($u(x) \equiv u(r)$, $r = |x|$).
1-Donner l'expression de Δu on coordonnées hypersphériques.
2-Pour $n \geq 1$, on pose $u_n(x) = \dfrac{1}{(\frac{1}{n} + |x|)^\alpha} = \dfrac{1}{(\frac{1}{n} + r)^\alpha}$ ou $\alpha \in (0, N-2)$. Montrer que

$$-\Delta u_n \geq C(\alpha, N) \frac{u_n(x)}{(|x| + \frac{1}{n})^2} \text{ ou } C(\alpha, N) > 0 \text{ dépend seulement de } \alpha \text{ et } N.$$

B- Soit $\Omega \subset I\!R^N$ un domaine borné de $I\!R^N$ et $\phi \in \mathcal{C}_0^2(\bar{\Omega}) \equiv \left\{ \phi \in \mathcal{C}^2(\bar{\Omega}) \text{ et } \phi \equiv 0 \text{ sur } \partial\Omega \right\}$.

1-Montrer que $\dfrac{\phi^2}{u_n}$ est bien définie dans $\bar{\Omega}$ et que

$$\nabla\left(\frac{\phi^2}{u_n}\right) = 2\left(\frac{\phi}{u_n}\right)\nabla\phi - \left(\frac{\phi^2}{u_n^2}\right)\nabla u_n.$$

2- On appliquant la formule de Green (la formule d'intégration par partie), montrer que

$$\int_\Omega (-\Delta u_n)(\frac{\phi^2}{u_n})dx = \int_\Omega \nabla u_n \nabla(\frac{\phi^2}{u_n})dx.$$

3-Prouver que $\displaystyle\int_\Omega f_n(x)\phi^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx$ ou f_n est une fonction a déterminer.

4-Montrer qu'il existe une constante $C \equiv C(\Omega, N, \alpha) > 0$ tel que $\forall x \in \Omega, \forall n \geq 1$ on a $f_n(x) \geq C$ et déduire que

$$C \int_\Omega \phi^2 dx \leq \int_\Omega |\nabla\phi|^2 dx \text{ (Inégalité de Poincaré.)}$$

EPREUVE corrigé EDP

Prob 1 :

Soit le problème

$$(1)\begin{cases} -\Delta u = f & \text{ds } B_1(0) \\ u = 0 & \text{sur } \partial B_1(0) \end{cases}$$

1) comme $-\Delta u = -\sum_{i=1}^{N} \partial_{ii}^2 u$

Donc $M = \begin{pmatrix} -1 & & 0 \\ & -1 & \\ 0 & & -1 \end{pmatrix}$, toutes les valeurs propres sont negative $\Rightarrow$ (1) est elliptique.

2)- Si $f \geq 0$ et $f \neq 0$, D'après le principe de Maximum fort $\Rightarrow u > 0$ ds $B_1(0)$.

3)- Soit u_1 et u_2 ~~deux~~ solutions de (1)

On pose $v = u_1 - u_2 \Rightarrow \begin{cases} -\Delta v = 0 & \text{ds } B_1(0) \\ v = 0 & \text{sur } \partial B_1 \end{cases}$

par le principe de Maximum $\Rightarrow v = 0 \Rightarrow u_1 = u_2$.

4)- $f(x) = |x|^{\alpha}$, si $|x| = r$, $\alpha > 0$ On cherche une solution sur la forme $u(x) = A - B|x|^{\theta}$

On passant au coordonnées "hypersphérique", On aura

$-\Delta u = -u'' - \frac{N-1}{r} u'$

$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} = u'' - \frac{N-1}{r} u' = f(r) & r \in (0,1) \\ u(1) = 0 \end{cases}$

$\Rightarrow \theta = \alpha + 2, \quad A = B = \frac{1}{(\alpha+2)(N+\alpha)}$

Prob 2

A) 1) $\Delta u = u'' + \frac{N-1}{r} u'$.

2) $$u_n(x) = \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + |x|\right)^\alpha} \quad \alpha \in (0, N-2) \ , N \geq 3.$$

On a $$= \frac{1}{\left(\frac{1}{n} + r\right)^\alpha} \equiv u_n(r)$$

$$u_n'(r) = \frac{-\alpha}{\left(\frac{1}{n} + r\right)^{\alpha+1}} \ , \ u_n''(r) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{\left(\frac{1}{n} + r\right)^{\alpha+2}}$$

$$-\Delta u_n = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{\left(\frac{1}{n} + r\right)^{\alpha+2}} + \frac{(N-1)\alpha}{r\left(\frac{1}{n} + r\right)^{\alpha+1}}$$

$$\geq \frac{-\alpha(\alpha+1)}{\left(\frac{1}{n} + r\right)^{2}} + \frac{(N-1)\alpha}{\left(r + \frac{1}{n}\right)^{\alpha+2}} \quad \left(r \leq r + \frac{1}{n}\right).$$

$$-\Delta u \geq \underbrace{\alpha\left(N - (\alpha+2)\right)}_{C(N,\alpha)} \frac{u_n}{\left(|x| + \frac{1}{n}\right)^2} \ ; \ C(N,\alpha) > 0.$$

B) 1) Il est clair que $u_n \in C^\infty(\bar{\Omega})$ et que $u_n > 0$ ds $\bar{\Omega}$ $\Rightarrow \frac{\phi^2}{u_n} \in C^1(\bar{\Omega})$

$$\nabla\left(\frac{\phi^2}{u_n}\right) = \frac{\nabla(\phi^2)}{u_n} + \phi^2 \nabla\left(\frac{1}{u_n}\right)$$

$$= 2\frac{\phi}{u_n} \nabla\phi - \frac{\phi^2}{u_n^2} \nabla u_n.$$

2) ..

D'après la formule de Green on a

$$\int_\Omega \nabla u_n \nabla\left(\frac{\phi^2}{u_n}\right) dx = \int_{\partial\Omega} \frac{\phi^2}{u_n} \underbrace{\frac{\partial u_n}{\partial \eta}}_{=0} d\sigma - \int_\Omega \Delta u_n \frac{\phi^2}{u_n}$$

$$= \int_\Omega (-\Delta u_n) \frac{\phi^2}{u_n}.$$

D'après la question 2-B on aura:

$$\int_\Omega (-\Delta u_n) \frac{\phi^2}{u_n} dx = 2\int_\Omega \frac{\phi}{u_n} \nabla u_n \nabla \phi - \int_\Omega \frac{\phi^2}{u_n} |\nabla u_n|^2$$

$$\leq \int_\Omega |\nabla \phi|^2 dx \quad [2ab - b^2 \leq a^2]$$

Maintenant par la question A-2,

$$\int_\Omega \frac{-\Delta u_n}{u_n} \phi^2 \geq C(N,\alpha) \int_\Omega \frac{\phi^2(x)}{(|x| + \frac{1}{n})^2} dx$$

$$\geq C(\Omega) \int_\Omega \phi^2(x) dx \quad (\Omega \text{ borné})$$

$$\Longrightarrow \quad C(\Omega, N, \alpha) \int_\Omega \phi^2(x) dx \leq \int_\Omega |\nabla \phi|^2$$

$$\forall \phi \in C_0^2(\bar{\Omega}).$$