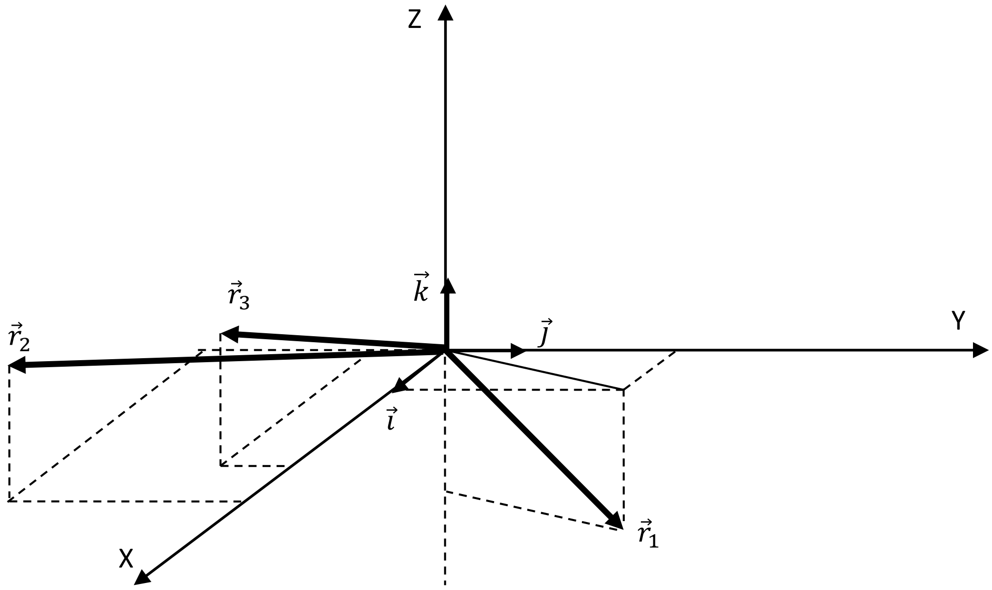
Corrigés des exercices

Exercice 1

On a, $\overrightarrow{r_1} = \vec{\imath} + 3\vec{\jmath} - 2\vec{k}$ $\overrightarrow{r_2} = 4\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + 2\vec{k}$ et $\overrightarrow{r_3} = 3\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$

1- La représentation des vecteurs $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$ et $\overrightarrow{r_3}$:



2- Les modules :

$$|\overrightarrow{r_1}| = \sqrt{x_1^2 + y_1^2 + z_1^2} = \sqrt{1+9+4} = \sqrt{14}$$
$$|\overrightarrow{r_2}| = \sqrt{x_2^2 + y_2^2 + z_2^2} = \sqrt{16+4+4} = \sqrt{24}$$
$$|\overrightarrow{r_1}| = \sqrt{x_3^2 + y_3^2 + z_3^2} = \sqrt{9+1+4} = \sqrt{14}$$

3- $\vec{A} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} + \overrightarrow{r_3}$ et $\vec{B} = \overrightarrow{r_1} + \overrightarrow{r_2} - \overrightarrow{r_3}$

$$\vec{A} = (x_1 + x_2 + x_3)\vec{\imath} + (y_1 + y_2 + y_3)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2 + z_3)\vec{k} = 8\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

Donc $\vec{A} = 8\vec{\imath} + 2\vec{k}$

Son module : $|\vec{A}| = \sqrt{64+4} = \sqrt{68}$

$$\vec{B} = (x_1 + x_2 - x_3)\vec{\imath} + (y_1 + y_2 - y_3)\vec{\jmath} + (z_1 + z_2 - z_3)\vec{k} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$$

Donc $\vec{B} = 2\vec{\imath} + 2\vec{\jmath} - 2\vec{k}$

Son module : $|\vec{B}| = \sqrt{4+4+4} = \sqrt{12}$

4- Le vecteur unitaire porté par le vecteur $\vec{C} = \overrightarrow{r_1} + 2\overrightarrow{r_2}$:

$$\vec{C} = (1+8)\vec{\imath} + (3-4)\vec{\jmath} + (-2+4)\vec{k} = 9\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$
$$\Longrightarrow \vec{C} = 9\vec{\imath} - \vec{\jmath} + 2\vec{k}$$

et $|\vec{C}| = \sqrt{86}$

donc $\vec{u} = \frac{\vec{c}}{|\vec{c}|} = \frac{9}{\sqrt{86}}\vec{\imath} - \frac{1}{\sqrt{86}}\vec{\jmath} + \frac{2}{\sqrt{86}}\vec{k}$

5- $\vec{r_1}.\vec{r_2} = |\vec{r_1}|.|\vec{r_2}|.cos\varphi$

$$= x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2 = 4 - 6 - 4 = -6$$

Et $\vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = \begin{vmatrix} \vec{\imath} & \vec{\jmath} & \vec{k} \\ 1 & 3 & -2 \\ 4 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{vmatrix}\vec{\imath} - \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{\jmath} + \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix}\vec{k}$

$$\Longrightarrow \vec{r_1} \wedge \vec{r_2} = 2\vec{\imath} - 10\vec{\jmath} - 14\vec{k}$$

Exercice 2 :

On donne les trois vecteurs $\vec{V_1}(1, 1, 0)$, $\vec{V_2}(0, 1, 0)$ et $\vec{V_3}$ (0, 0, 2).

1. Calculer les normes $\|\vec{V_1}\|$, $\|\vec{V_2}\|$et $\|\vec{V_3}\|$:

Calculons les normes des différents vecteurs et les vecteurs unitaires de leurs directions respectives.

$$\|\vec{V_1}\| = \sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{2} \Longrightarrow \vec{v_1} = \frac{\vec{V_1}}{\|\vec{V_1}\|};\ \ \vec{v_1}(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0)$$

$$\|\vec{V_2}\| = \sqrt{0^2 + 1^2 + 0^2} = 1 \Longrightarrow \vec{v_2} = \frac{\vec{V_2}}{\|\vec{V_2}\|} = \vec{\jmath}\,;\ \ \vec{v_2}(0, 1, 0)$$

$$\|\vec{V_3}\| = \sqrt{0^2 + 0^2 + 2^2} = \sqrt{4} = 2 \Longrightarrow \vec{v_3} = \frac{\vec{V_3}}{\|\vec{V_3}\|};\ \ \vec{v_3}(0, 0, 1)$$

2. On calcule cos $(\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}})$ comme suit :

$$\vec{v_1}.\vec{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad et\ \vec{v_1}.\vec{v_2} = \|\vec{v_1}\|.\|\vec{v_2}\|.\cos(\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}})$$

$$\Longrightarrow \cos\left(\widehat{\vec{v_1}, \vec{v_2}}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3. Nous avons :

$$\vec{v_1}\,.\,\vec{v_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\vec{v_2}\ \wedge \vec{v_3} = \begin{vmatrix} & \vec{\imath}\vec{\jmath}\vec{k} & \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{\imath} + 0\vec{\jmath} + 0\vec{k} = \vec{\imath}$$

$$\Longrightarrow \vec{v_2}\ \wedge \vec{v_3} = \vec{\imath}(1,0,0)$$

$$\vec{v_1}\,.\,(\vec{v_2} \wedge \vec{v_3}) = 1 \times 1 + 1 \times 0 + 0 \times 0 = 1$$

- Le premier terme représente le produit scalaire entre les vecteurs $\vec{v_1}$et $\vec{v_2}$, il est égal au produit du module de la projection de $\vec{v_1}$sur $\vec{v_2}$multiplié par le module de $\vec{v_2}$.
- Le deuxième terme est le produit vectoriel entre $\vec{v_2}$et $\vec{v_3}$.
- Le dernier terme est le produit mixte entre $(\vec{v_1}, \vec{v_2}, \vec{v_3})$ et qui n'est d'autre que le volume du parallélépipède construit sur la base des trois vecteurs.

Exercice 3 :

Exercice 4 :

Soit $M_1(1,1,1)$, $M_2(2,2,1)$ et $M_3(2,1,1)$.

L'équation du plan passant par $M_2(2,2,1)$ et $\vec{A} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$.

Soit X un point de coordonnées (x,y,z). $\overrightarrow{M_2X} = \begin{pmatrix} x-2 \\ y-2 \\ z-1 \end{pmatrix}$

On sait que $\vec{A}$ perpendiculaire à ce plan donc :

$$\vec{A}.\overrightarrow{M_2X} = (x-2)3 - (y-2)2 + (z-1)1 = 0$$

$\Rightarrow 3x - 2y + z - 3 = 0$ (*)

(*) est l'équation du plan passant par $M_2(2,2,1)$ et $\vec{A} = 3\vec{\imath} - 2\vec{\jmath} + \vec{k}$

Exercice 5 :

Soit un vecteur $\vec{U} = (t\vec{\imath} + 3\vec{\jmath})/(\sqrt{t^2+9})$

1- $\vec{U}$ est un vecteur unitaire ?

Il faut vérifier que $|\vec{U}| = 1$ **d'où** $|\vec{U}| = \sqrt{\frac{1}{(t^2+9)}(t^2+9)}=1$

Donc $\vec{U}$ est un vecteur unitaire.

2- La dérivée de $\vec{U}$:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{t}{(\sqrt{t^2+9})}\right)\vec{\imath} + \frac{d}{dt}\left(\frac{3}{(\sqrt{t^2+9})}\right)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{t^2 - t^2 + 9}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-3t}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{u}}{dt} = \left(\frac{9}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\imath} + \left(\frac{-3t}{(t^2+9)^{3/2}}\right)\vec{\jmath}$$

Exercice 6 :

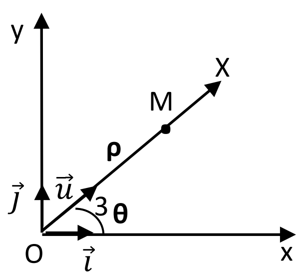
A) Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x,y)

1- Trouver x et y en fonction des coordonnées polaires ρ et θ ??

$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath}$…………………………..…………..(1)

D'autre part $\overrightarrow{OM}$ s'écrit par projection comme :

$\overrightarrow{OM} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath}$……………………………(2)



(1) et (2) $\Rightarrow \begin{cases} x = \rho\, cos\theta \\ y = \rho\, sin\theta \end{cases}$

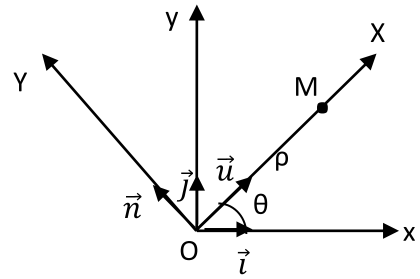
2- Le vecteur unitaire $\vec{u}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$:

On a $\overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{OM}|\vec{u} = \rho\vec{u} = \rho cos\theta\vec{\imath} + \rho sin\theta\vec{\jmath}$

Donc $\vec{u} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath}$

Et $\vec{n} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\vec{\jmath}$

$\vec{n}$ et $\vec{u}$ représentent les vecteurs unitaires de la base des coordonnés polaires.



1. Calculer l'expression $d\vec{u}/d\theta$, que représente ce vecteur ?

$$\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \frac{d(cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})}{d\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\vec{\jmath} = \vec{n}$$

$\boldsymbol{\frac{d\vec{u}}{d\theta}}$ représente un vecteur unitaire perpendiculaire à $\vec{u}$ dans le sens directe.

B) La position du point M est donnée par $\begin{cases} \overrightarrow{OM} = t^2\vec{u} \\ \theta = \omega t \end{cases}$ (ω constante)

L'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ en coordonnées polaires est :

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d(t^2\vec{u})}{dt} = 2t\vec{u} + t^2\frac{d\vec{u}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = \frac{d\vec{u}}{d\theta}.\frac{d\theta}{dt} = \vec{n}.\omega$$

$$\boldsymbol{\vec{v} = 2t.\vec{u} + t^2.\omega.\vec{n}}$$

Exercice 7

Un point matériel M est repéré par ses coordonnées cartésiennes (x, y).

1. Ecrire la relation entre les coordonnées cartésiennes et les coordonnées polaires.

$$\begin{cases} x = rcos\theta \\ y = rsin\theta \end{cases}$$

2. Donner l'expression des vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_r}$ *et* $\overrightarrow{U_\theta}$ en fonction des vecteurs unitaires $\vec{\imath}$ *et* $\vec{\jmath}$.

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \end{cases}$$

3. Trouver l'expression du vecteur vitesse $\vec{v}$ du point M en coordonnées polaires.

$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r} \Longrightarrow \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dr}{dt}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\overrightarrow{U_r}}{dt}$$

$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\overrightarrow{U_r}}{d\theta}$$
$$\Rightarrow \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{U_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{U_\theta}$$

4. Donner l'expression du vecteur $\vec{A} = 2x\vec{\imath} - y\vec{\jmath}$en coordonnées polaires.

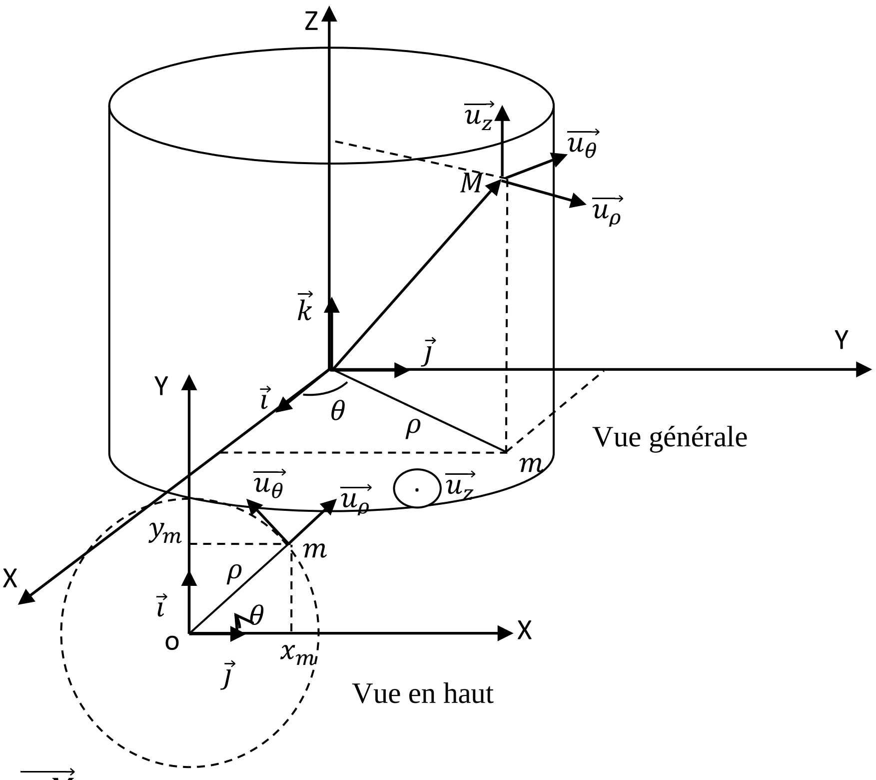
$$\vec{A} = 2rcos\theta(cos\theta\vec{\imath} - sin\theta\vec{\jmath}) - rsin\theta(sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})$$
$$\vec{A} = (2rcos^2\theta - rsin^2\theta)\vec{\imath} + (-3rcos\theta sin\theta)\vec{\jmath}$$
$$\vec{A} = (2rcos^2\theta - rsin^2\theta)\vec{\imath} - 3(rcos\theta sin\theta)\vec{\jmath}$$

Exercice 8 :

1. <u>Les relations reliant les coordonnées cartésiennes **(x, y, z)** aux **coordonnées cylindriques(ρ, θ, z)**</u> :

Soit $\vec{r} = \overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

m est la projection du point M sur le plan (Oxy).



On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$

$$\overrightarrow{Om} = \left|\overrightarrow{Om}\right|\overrightarrow{u_\rho} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\,\theta\,\vec{\jmath}$$

Et

$$\overrightarrow{mM} = \left|\overrightarrow{OZ_M}\right| = z_M\vec{k} = z\vec{k}$$

Donc $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = \rho\cos\theta\,\vec{\imath} + \rho\sin\,\theta\,\vec{\jmath} + z\vec{k}$

On peut écrire le vecteur position en coordonnées cylindrique par la relation suivante :

$$\overrightarrow{OM} = \rho\overrightarrow{u_\rho} + z\vec{u}_z$$

Les relations qui lient les coordonnées cartésiennes aux coordonnées cylindriques sont :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases}$$

- <u>Les vecteurs unitaires de la base des coordonnées cylindriques</u> :

Le vecteur de déplacement en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

Avec

$$\begin{cases} dx = d\rho.cos\theta - \rho.\sin\theta.d\theta \\ dy = d\rho.sin\theta + \rho.cos\theta.d\theta \\ dz = dz_M \end{cases}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{dr} = (d\rho.cos\theta - \rho.\sin\theta.d\theta)\vec{\imath} + (d\rho.sin\theta + \rho.cos\theta.d\theta)\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\Longrightarrow \overrightarrow{dr} = (-\sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath})\rho d\theta + (cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath})d\rho + dz\vec{k} \text{............(1)}$$

D'autre part le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées cylindriques s'écrit : $\overrightarrow{dr} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z}$…………...............……..(2)

D'après les relations (1) et (2) on a :

$$\begin{cases} \overrightarrow{u_\rho} = cos\theta\vec{\imath} + sin\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{u_z} = \vec{k} \end{cases}$$

- <u>Calcul de la surface d'un cylindre à partir des coordonnées cylindriques</u> :

On a dS = dx.dy

Mais x et y sont des variables dépendantes entre elles, donc on prend la surface élémentaire en coordonnées cylindriques, $dS_{base} = dl_1.dl_2$ et $dS_{latérale} = dl_2.dl_3$ (ρ=R).

Où $dl_1=d\rho$, $dl_2=\rho.d\theta$ et $dl_3=dz$ alors $dS_{base} = \rho d\rho.d\theta$ et $dS_{latérale} = Rd\theta.dz$

Idée de preuve :

On a $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = d\rho\overrightarrow{u_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{u_\theta} + dz\overrightarrow{u_z} = dl_1\overrightarrow{u_\rho} + dl_2\overrightarrow{u_\theta} + dl_3\overrightarrow{u_z}$

$\Longrightarrow dS_{base} = dl_1.dl_2 = d\rho.\rho d\theta$

$$\Longrightarrow S_{base} = \int_0^R \int_0^{2\pi} \rho.d\rho.d\theta$$

$$\Longrightarrow S_{base} = \int_0^{2\pi} \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^R d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{R^2}{2} d\theta = \frac{R^2}{2}[\theta]_0^{2\pi} = \pi R^2$$

Donc la surface de la base d'un cylindre est : $S_{base} = \pi R^2$

D'autre par la surface latérale du cylindre sera calculée a partir de la relation suivante : $dS_{latérale} = dl_2.dl_3$

$$\Longrightarrow dS_{latérale} = Rd\theta.dz$$

$$\Longrightarrow S_{latérale} = \int dS_{latérale} = \int_0^{2\pi}\int_0^H Rd\theta dz = R.2\pi H$$

Donc la surface latérale du cylindre est $S_{latérale}=2\pi RH$.

- Calcul du volume d'un cylindre :

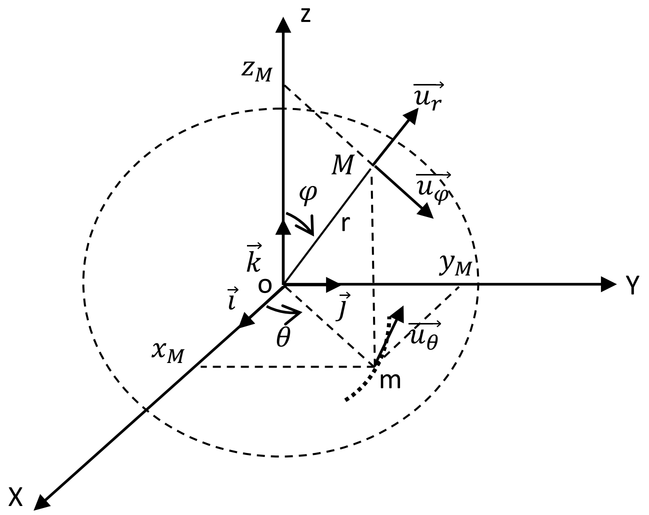
On a dV =dl_1. dl_2. dl_3= ρdρ.dθ.dz

$$\Rightarrow V = \int dV = \int_0^H \int_0^{2\pi} \int_0^R \rho d\rho.d\theta.dz = \pi R^2 H$$

Donc le volume du cylindre est $\mathbf{V = \pi R^2 H}$

2. Les relations reliant les coordonnées cartésiennes **(x, y, z)** aux **coordonnées sphériques (r, θ, φ)** :

3



On a $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}$ (voir le schéma)

avec $|\overrightarrow{Om}| = r\sin\varphi$

$$\Rightarrow \overrightarrow{Om} = |\overrightarrow{Om}|cos\theta\vec{\imath} + |\overrightarrow{Om}|\sin\theta\,\vec{\jmath}$$

Et $\overrightarrow{mM} = z_M\vec{k} = r\ cos\varphi\ \vec{k}$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = |\overrightarrow{Om}|cos\theta\vec{\imath} + |\overrightarrow{Om}|\sin\theta\,\vec{\jmath} + rcos\varphi\vec{k}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM} = r\sin\varphi\ cos\theta\vec{\imath} + r\sin\varphi\sin\theta\,\vec{\jmath} + rcos\varphi\vec{k} \ldots\ldots\ldots..(1)$$

D'autre part le vecteur position en coordonnées cartésiennes s'écrit :

$$\overrightarrow{OM} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + rz\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

D'où

$$\begin{cases} \boldsymbol{x = rsin\varphi cos\theta} \\ \boldsymbol{y = r\sin\varphi\sin\theta} \\ \boldsymbol{z = rcos\varphi} \end{cases}$$

Remarque : Le vecteur position en coordonnées sphériques s'écrit par (voir le schéma):

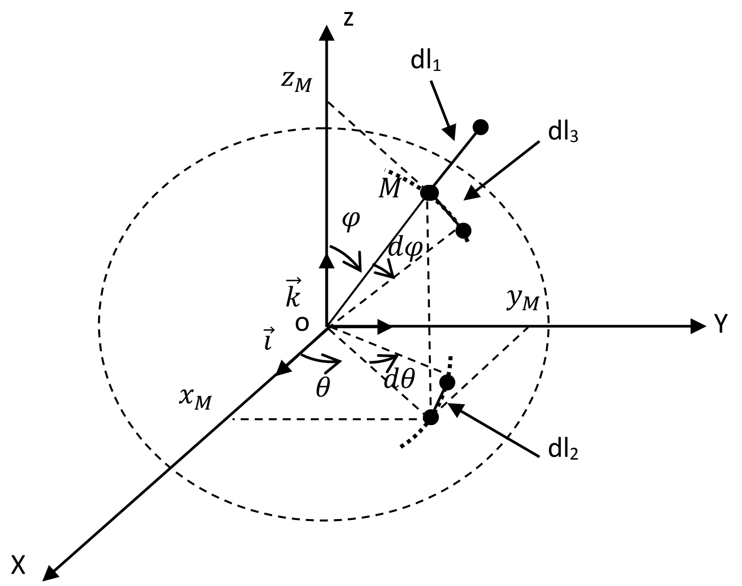
$$\overrightarrow{OM} = r\overrightarrow{U_r}$$

- Calcul des vecteurs unitaires de la base des coordonnées sphériques :

Le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées cartésiennes est donné par :

$$\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots..\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

D'autre part, d'après le schéma, le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées sphériques est donné par : $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dl_1\overrightarrow{U_r} + dl_2\overrightarrow{U_\theta} + dl_3\overrightarrow{U_\varphi}$



Avec $\begin{cases} dl_1 = dr \\ dl_2 = rsin\varphi d\theta \\ dl_3 = rd\varphi \end{cases}$

Donc le vecteur de déplacement élémentaire en coordonnées sphériques s'écrit comme : $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{U_r} + rsin\varphi d\theta\overrightarrow{U_\theta} + rd\varphi\overrightarrow{U_\varphi}$

On a aussi :

$$\begin{cases} x = rsin\varphi cos\theta \\ y = r\sin\varphi\sin\theta \\ z = rcos\varphi \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} dx = sin\varphi.cos\theta.dr - r.sin\varphi.sin\theta.d\theta + r.cos\varphi.cos\theta.d\varphi \\ dy = \sin\varphi.\sin\theta.dr + r.sin\varphi.cos\theta + r.cos\varphi.sin\theta.d\varphi \\ dz = cos\varphi.dr - r.sin\varphi.d\varphi \end{cases}$$

Si on remplace les expressions de dx, dy et dz dans l'expression (1) on trouve :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = &(sin\varphi.cos\theta.dr - r.sin\varphi.sin\theta.d\theta + r.cos\varphi.cos\theta.d\varphi)\vec{\imath} \\ &+ (\sin\varphi.\sin\theta.dr + r.sin\varphi.cos\theta + r.cos\varphi.sin\theta.d\varphi)\vec{\jmath} \\ &+ (cos\varphi.dr - r.sin\varphi.d\varphi)\vec{k} \end{aligned}$$

$\Longrightarrow \overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dr\left(sin\varphi.cos\theta.\vec{\imath} + \sin\varphi.sin\theta\,\vec{\jmath} + cos\varphi\vec{k}\right) + r.sin\varphi.d\theta(-sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath}) + r.d\varphi\left(cos\varphi.cos\theta.\vec{\imath} + cos\varphi.sin\theta.\vec{\jmath} - sin\varphi.\vec{k}\right)$…………...…………………..(2)

D'autre part, on a $\overrightarrow{dr} = \overrightarrow{dOM} = dr\overrightarrow{U_r} + rsin\varphi d\theta\overrightarrow{U_\theta} + rd\varphi\overrightarrow{U_\varphi}$………..…….……….(3)

Par identification, entre l'équation (2) et (3), les vecteurs unitaires de la base des coordonnées sphériques sont :

$$\begin{cases} \overrightarrow{U_r} = sin\varphi . cos\theta . \vec{\imath} + \sin\varphi . sin\theta\, \vec{\jmath} + cos\varphi\vec{k} \\ \overrightarrow{U_\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta\vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\varphi} = cos\varphi . cos\theta . \vec{\imath} + cos\varphi . sin\theta . \vec{\jmath} - sin\varphi . \vec{k} \end{cases}$$

- <u>Calcul de la surface d'une sphère</u> :

Si M un point qui se trouve sur la surface (r = R), la surface élémentaire d'une sphère de rayon R s'écrit en coordonnées sphériques par :

$$dS = dl_2 . dl_3 = (R. sin\varphi . d\theta).(R. d\varphi)$$

$$\Rightarrow S = R^2 \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi} sin\varphi d\varphi$$

$$\Rightarrow S = R^2 (2\pi). [-cos\varphi]_0^{\pi} = 4\pi R^2$$

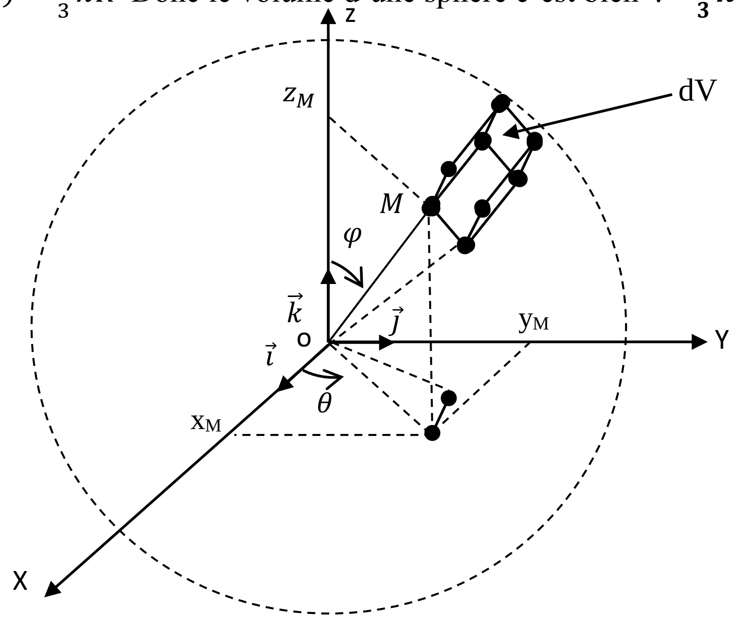
Donc la surfase d'une sphère de rayon R est $\boldsymbol{S = 4\pi R^2}$.

- <u>Calcul du volum d'une sphère de rayon R</u> :

Le volume élémentair d'une sphère de rayon R est donné par :

$$dV = dl_1 . dl_2 . dl_3 = dr. r. sin\varphi . d\theta . r. d\varphi \Rightarrow V = \int_0^R r^2 dr . \int_0^{2\pi} d\theta . \int_0^{\pi} sin\varphi d\varphi$$

$\Rightarrow V = \frac{R^3}{3}(2\pi).(2) = \frac{4}{3}\pi R^3$Donc le volume d'une sphère c'est bien **V=** $\boldsymbol{\frac{4}{3}\pi R^3}$**.**



Représentation graphique d'un élément de volume d'une sphère

Exercice supplémentaire

La différentielle du vecteur $\vec{r}$, $d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$ peut se mettre en coordonnées cylindriques sous la forme $d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\, dz$.

1. On cherche les vecteurs $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}$, $\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}$ et $\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}$.

On a $\vec{r} = x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} + z\vec{k}$

- Le vecteur de déplacement en coordonnées cartésiennes (x, y, z) :

$$d\vec{r} = d\vec{l} = dx\vec{\imath} + dy\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

- Le vecteur de déplacement en coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) :

$$d\vec{r} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\, d\rho + \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\, d\theta + \frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\, dz$$

Les relations qui lient les coordonnées cartésiennes (x, y, z) aux coordonnées cylindriques (ρ, θ, z) sont :

$$\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \\ z = z_M \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} dx = d\rho . cos\theta - \rho . \sin\theta . d\theta \\ dy = d\rho . sin\theta + \rho . cos\theta . d\theta \\ dz = dz_M \end{cases}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = d\vec{l} = (d\rho . cos\theta - \rho . \sin\theta . d\theta)\vec{\imath} + (d\rho . sin\theta + \rho . cos\theta . d\theta)\vec{\jmath} + dz\vec{k}$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = (cos\theta . \vec{\imath} + sin\theta . \vec{\jmath})d\rho + (-\rho sin\theta\vec{\imath} + \rho . cos\theta . \vec{\jmath})d\theta + dz\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots(1)$$

$$\Rightarrow d\vec{r} = \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho}\right) d\rho + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta}\right) d\theta + \left(\frac{\partial\vec{r}}{\partial z}\right) dz \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(2)$$

Par identification entre (1) et (2) on aura :

$$\Rightarrow \begin{cases} \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = cos\theta . \vec{\imath} + sin\theta . \vec{\jmath} \\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -\rho sin\theta\vec{\imath} + \rho . cos\theta . \vec{\jmath} \\ \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \end{cases}$$

2. En déduire les vecteurs unitaires $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}$ et$\overrightarrow{U_z}$(coordonnées cylindriques) en fonction de $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$ et $\vec{k}$ (coordonnées cartésiennes) :

Le vecteur de déplacement en coordonnées cylindriques s'écrit:

$$d\vec{r} = d\rho\overrightarrow{U_\rho} + \rho d\theta\overrightarrow{U_\theta} + dz\vec{k} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots(3)$$

$$(2) \text{ et } (3) \Rightarrow \begin{cases} \overrightarrow{U_\rho} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial\rho} = cos\theta . \vec{\imath} + sin\theta . \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_\theta} = \frac{1}{\rho}\frac{\partial\vec{r}}{\partial\theta} = -sin\theta\vec{\imath} + cos\theta . \vec{\jmath} \\ \overrightarrow{U_z} = \frac{\partial\vec{r}}{\partial z} = \vec{k} \end{cases}$$

<u>Remarque</u> :

On peut écrire les vecteurs unitaires de la base des coordonnées cartésiennes en fonction des vecteurs unitaires de la base des coordonnées cylindrique à partir du tableau ci-dessous:

	$\vec{\imath}$	$\vec{\jmath}$	$\vec{k}$
$\overrightarrow{u_\rho}$	Cosθ	Sinθ	0
$\overrightarrow{u_\theta}$	-sinθ	Cosθ	0
$\overrightarrow{u_z}$	0	0	1

$$\Rightarrow \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

3. Vérifiant qu'ils sont orthogonaux ?

$$\Rightarrow \begin{cases} \left|\overrightarrow{U_\rho}\right| = \sqrt{cos\theta^2 + sin\theta^2} = 1 \\ \left|\overrightarrow{U_\theta}\right| = \sqrt{(-sin\theta)^2 + cos\theta^2} = 1 \\ \left|\overrightarrow{U_z}\right| = \left|\vec{k}\right| = 1 \end{cases}$$

D'où $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}$et $\overrightarrow{U_z}$, sont des vecteurs unitaires.

On a $\overrightarrow{U_\rho}.\overrightarrow{U_\theta} = 0, \overrightarrow{U_\rho}.\overrightarrow{U_z} = 0$ et$\overrightarrow{U_z}.\overrightarrow{U_\theta} = 0$

Donc $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta},$ et$\overrightarrow{U_z}$ sont des vecteurs orthogonaux.

Par conséquent les vecteurs $\overrightarrow{U_\rho}, \overrightarrow{U_\theta}, \overrightarrow{U_z}$ forment un repère orthonormé.

4. Ecrire $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ en coordonnées cylindriques.

On a $\begin{cases} x = \rho cos\theta \\ y = \rho sin\theta \ et \\ z = z_M \end{cases} \begin{cases} \vec{\imath} = \cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{\jmath} = \sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{k} = \overrightarrow{u_z} \end{cases}$

Donc $\vec{A} = 2x\vec{\imath} + y\vec{\jmath} - 2z\vec{k}$ s'écrit :

$$\Rightarrow \vec{A} = 2\rho cos\theta\left(\cos\theta\overrightarrow{u_\rho} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}\right) + \rho sin\theta\left(\sin\theta\overrightarrow{u_\rho} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta}\right) - 2z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \vec{A} = (2\rho cos\theta^2 + \rho sin\theta^2)\overrightarrow{u_\rho} + (-2\rho\cos\theta\sin\theta + \rho os\theta\sin\theta)\overrightarrow{u_\theta} - 2z\vec{k}$$

$$\Rightarrow \boldsymbol{\vec{A} = (cos\theta^2 + 1)\rho\overrightarrow{u_\rho} - \rho\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{u_\theta} - 2z\overrightarrow{u_z}}$$